*Определение квадратного уравнения*

 Перед введением понятия квадратного уравнения следует повторить определения уравнения и корня уравнения; вспомнить, что значит решить уравнение, свойства уравнений.

 *Определение*

Квадратным уравнением называется уравнение вида

*aх2 + bх + c = 0* (1),

где *х* – переменная, *а, b, с* - некоторые числа, причем *а* ≠ 0.

Квадратное уравнение называют также уравнением второй степени. Если *а*=0, то уравнение (1) будет линейным .Числа *а , b , с* – коэффициенты квадратного уравнения: а называется первым коэффициентом, *b* – вторым коэффициентом, *с* – свободным членом. Учащиеся должны усвоить определение квадратного уравнения, уметь распознавать квадратные равнения, приводить примеры, а также правильно указывать коэффициенты *а, b, с* для дальнейшего обучения решению квадратных уравнений по формуле. Полезно обратить внимание на выполнение следующих заданий:

1.Является ли число *-1*  корнем уравнения

*2х – 1 =0 3*$x^{2}$ *+ 3 = 0 (х – 2 ) ( х + 1 ) =0*

2. Назовите в квадратном уравнении его коэффициенты

 *5х2 - 8х + 4 = 0 х2 + 3х – 10 = 0*

 *-х2 - 8х+ 1 = 0 х2 + 5х = 0*

 *6х2 – 30 =0 9х2 = 0*

3. Найдите арифметический корень из чисел *49; 0,64; 0; 160000; 2,25; 0,09*.

4. Представьте в виде квадрата числа: *25 ; 0,04 ; 7 ; 8*.

5. Разложите на множители

 *х2 -16; х2 -0,49; 2,25-х2; х2+5х; 9х2–1; 1,21 х2 - 0,81* .

*Неполные квадратные уравнения*

Повторение квадратных уравнений начинается с ре­шения уравнения *х2 = d* и связывает эту тему с понятием арифме­тического корня.

Выделение в особую тему рассмотрения непол­ных квадратных уравнений связано не только с тем, что их решение проще решения квадратного уравнения общего случая, но и с тем, что опирается на известный учащимся способ решения уравнения разложением его левой части на множители, который в дальнейшем используется неоднократно.

Вводится понятие неполного квадратного уравнения, рассматриваются их виды, для каждого вида разбирается прием решения.

*Определение*

Неполным квадратным уравнением называется квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов *b* или *с* равен 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *1)* ***c = 0****ax²+bx = 0**x(ax+b) = 0*$х\_{1}$*= 0 или ax+b=0*$$х\_{2}=-\frac{b}{a}$$ | *2)* ***b=0****ax²+ c=0, a*$>0$*если с<0, то* *= ±**Если с>0,**то корней нет* | *3)* ***b=0, c = 0*** *ax² = 0* *x = 0* |

 Примеры решения неполных квадратных уравнений*.*

|  |  |
| --- | --- |
| *х2 – 10х = 0*Решение:*х(х-10) = 0*$х\_{1}$*=0,* $х\_{2}$*=10*Ответ: *0; 10*. | *100х²- 36 = 0* Решение: *(10х -6)(10х+6) = 0* *10х – 6 = 0 или 10х +6= 0**10х = 6 или10х= - 6*$х\_{1}=0,6$$х\_{2}=-0,6$Ответ*: - 0,6; 0,6* |
| *3х2 – 12х = 0.*Решение: *3х(х – 4) = 0,* *х(х – 4) = 0,**х1 = 0, х2 = 4.*Ответ: *0; 4*. | *х² - 2 = 0* Решение:*х2 = 2* *х1,2 = .*Ответ: . |

Для самостоятельной работы, с последующей проверкой:

|  |  |
| --- | --- |
| 1.
2.
3. $4-36x^{2}=0$
4. $5x^{2}+30=0$
5. $4x^{2}-9=0$
 | $$x^{2}-7х=0$$$$10х^{2}+5х=0$$12$х^{2}+3х=0$$$2х^{2}+х=0$$ |

 Полезно предложить решение уравнений, которые после некоторых преобразований сводятся к неполным квадратным уравнениям, что позволит поддержать навыки тождественных преобразований.

$$х^{2}+2=х+2$$

$$12-x^{2}=11$$

$$х\left(2х+3\right)=3х+4$$

*Полные квадратные уравнения*

Умение решать квадратные уравнения по формуле корней относится к числу важнейших умений в курсе алгебры. Не овладев ими, учащиеся не смогут усваивать материал следующих тем, испытывать затруднения при изучении смежных дисциплин.

Квадратное уравнение

***Приложение 1***

*aх²+ bx + c = 0, а ≠ 0*

Дискриминант *D = b² - 4ac* (число). Эту формулу надо знать наизусть.

***Важно:*** По знаку дискриминанта можно определить, сколько корней имеет уравнение.

* если *D>0*, то два корня;
* если *D = 0*, то один корень;
* если *D<0*, то корней нет.

Возможны три случая:

1. Если *D>0*, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня:

 * b2 – 4ас.*

1. Если *D=0*, то квадратное уравнение имеет один корень: .
2. Если *D<0*, то квадратное уравнение не имеет корней.

Обратите внимание, что для каждого уравнения необходимо выписать коэффициенты, да это долго, зато не допустят лишних ошибок. Еще происходят ошибки при подстановке отрицательных значений коэффициентов. Здесь спасает подробная запись формулы с конкретными числами.

Учащиеся должны понимать, что формула применима для решения любого квадратного уравнения, однако, следует подчеркнуть, что неполные квадратные уравнения удобнее решать, пользуясь частными приемами. То же самое следует отметить про квадратное уравнение, левую часть которого можно свернуть в квадрат двучлена (дискриминант такого уравнения равен 0) .

 Целесообразно повторить формулу корней квадратного уравнения с *четным вторым коэффициентом*, что значительно упрощает расчеты.

*aх²+ bx + c = 0, а ≠ 0, b =2к*

*D=*$k^{2}-ac$*,* $ x\_{1,2}=\frac{-k\pm \sqrt{D}}{a}$

***Применение на практике***

Вся система упражнений направлена на усвоение алгоритма. При этом нужно обратить внимание на необходимость преобразовать квадратное уравнение, прежде чем перейти к применению формулы:

- перед решением необходимо привести уравнение к стандартному виду, выстроить его правильно;

- если первый коэффициент отрицательный, то лучше сделать его положительным, умножив обе части уравнения на -1;

- если среди коэффициентов есть дробные числа, то лучше избавиться от дробей, умножив обе части уравнения на число равное общему знаменателю;

 - проверять, нельзя ли коэффициенты уравнения сократить.

 *Решение упражнений*.

*1. *

 *Решение:*

 *>0, два корня;*

 **

 *Ответ: *

*2. *

 *Решение: *D=0, *один корень;*

 **

*Ответ: *

*3.* ******

*Решение: <0.*

 *Уравнение не имеет корней.*

*Ответ: нет решений.*

 *4. *

*Решение:*

 *а = 3, b = - 14, с = 16, k = - 7;*

 *D=k2 – ас. D= (-7)2 - 3·16 = 49 – 48 = 1, D>0, два корня;*

 **

*Ответ: *

*Уравнения для закрепления:*

*х2 + 9х + 18=0 (х1=-6, х2=-3)*

*х2 - 4х – 21=0 (х1=7, х2=-3)*

*10х2 + 30х + 20=0 (х1=-1, х2=-2)*

*х2- 6х + 6=0 (х1,2=3)*

*х2 -2х + 8=0 (корней нет)*

*4х2 – 4х + 1=0 *

*3х2 +7х + 2=0 *

*х(2х+1)=3х+4( х1=-1, х2=2)*

$x^{2}-6х=4х-25(х=5)$

Не мешает детям напомнить *некоторые свойства коэффициентов квадратного уравнения*, которые упрощают вычисления.

Пусть дано квадратное уравнение *aх²+ bx + c = 0, а ≠ 0*

1. *Если a+b+c=0, то*$ х\_{1}=1, х\_{2}=\frac{c}{a}$ .
2. *Если b=a+c, то* $ х\_{1}=-1, х\_{2}=-\frac{c}{a}$

**Примеры:**

1)

Решение:

так как, а + b + с = 0 (2 – 7 + 5 =0), то

Ответ: 1; 2,5.

2)

Решение:

так как 7 – 5 – 2 = 0, то

Ответ:

3)

Решение:

так как а + с = b (5 + 2 = 7), то

Ответ:

*Приведенное квадратное уравнение. Теорема Виета.*

Если первый коэффициент а = 1, то полученное квадратное уравнение называется приведенным и записывается в виде

*x2 + px + q = 0*.

 Теорема Виета (прямая)

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому c противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

*х1 + х2 = - p; х1·х2 = q.*

Обратная теорема Виета (для приведенного уравнения)

Если числа *m ,n*таковы, что их сумма равна *– p* , а произведение *q*, то эти числа являются корнями уравнения *x2 + px + q = 0*.

Часто встречаются ошибки, связанные с неправильным распространением формул на квадратное уравнение, в котором первый коэффициент отличен от *1* , поэтому всегда использование теоремы (и ей обратной) следует начинать с проверки, является ли уравнение приведенным.

 *Решение упражнений*

 *1. *

 *Решение:*

 *p=-5, q=6.*

*Подберем два числа х1 и х2 так, чтобы*

 **

 **

 *х1=2, х2=3*

 *Ответ: 2; 3.*

Если свободный член *q* приведенного квадратного уравнения положителен, то уравнение имеет два корня одинаковых по знаку и он зависит от второго коэффициента *p*. Если *p>0*, то оба корня отрицательны, если *p<0*, то оба корня положительны.

*1.   * и **

*2.   * и **

Если свободный член *q* приведенного уравнения отрицателен, то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если *p<0*, или отрицателен, если *p>0*.

*1.   * и **

*2.   * и **

*Самостоятельная работа*

*1.**х2 - х -42= 0 (х1=7, х2=-6)*

*2. у2 – 2у – 15 = 0 (у1=5, у2=-3)*

*3. у2 –у – 30 = 0 (у1=6, у2=-5)*

*4. у2 + 6у +9 = 0 (у=-3)*

*5. 5у2 -3у-14=0 (у1=2, у2=-1,4)*

Теорему Виета удобно использовать в заданиях ГИА повышенного уровня.

Пример

1. *х1 и х2 –* корни уравнения *х2 + 3х + m = 0.* При каком значении *m* разность корней данного уравнения будет равн*а 6?*

**Решение:**

*х1 + х2 = - 3, х1·х2 = m.*

*Пусть* х1>х2*, тогда, согласно условию, х1 – х2 = 6.*

**

**

1. *Пусть* х1 *и* х2$-корни$ *квадратного уравнения*$ 3х^{2}+11х+5=0$*. Не вычисляя*$ х\_{1}и х\_{2}, $*найдите значение выражения*$ \frac{6х\_{1}^{2}х\_{2}+ 6х\_{1}х\_{2}^{\begin{array}{c}2\\ \end{array}}}{ х\_{2}х\_{1}}$*.*

*Решение.*$ \frac{6х\_{1}^{2}х\_{2}+ 6х\_{1}х\_{2}^{\begin{array}{c}2\\ \end{array}}}{ х\_{2}х\_{1}}=\frac{ 6х\_{1}х\_{2}(х\_{1}+х\_{2})}{х\_{2}х\_{1}}=6(х\_{1}+х\_{2})$

*По теореме Виета*$ х\_{1}+х\_{2}=-11$ *, значит 6*$∙\left(-11\right)=-66$